

Série 7

Exercice 29. The mechanics at Isaac's garage want to replace a car gearbox but know that they are often copied and sold as original pieces. Assume a probability $1/4$ of buying a pirated gearbox, and a probability $3/4$ of buying an original one. The lifespan of a gearbox is an exponential random variable, with λ_1 for a pirated one and parameter λ_2 for an original, where $\lambda_2 < \lambda_1$. Let T denote the lifespan of the gearbox that they install, and suppose that it is still working at time t after it was installed. What is the probability $p(t)$ that it was pirated? Find the limit of $p(t)$ when $t \rightarrow \infty$. Discuss.

Solution 29. Soit $\mathcal{P}$ désignant l'événement "le composant acheté est piraté". Alors

$$\Pr(T > t) = \Pr(T > t \mid \mathcal{P})\Pr(\mathcal{P}) + \Pr(T > t \mid \mathcal{P}^c)\Pr(\mathcal{P}^c) = e^{-\lambda_1 t} \times (1/4) + e^{-\lambda_2 t} \times (3/4)$$

et

$$p(t) = \Pr(\mathcal{P} \mid T > t) = \frac{\Pr(T > t \mid \mathcal{P})\Pr(\mathcal{P})}{\Pr(T > t)} = \frac{\frac{1}{4}e^{-\lambda_1 t}}{\frac{1}{4}e^{-\lambda_1 t} + \frac{3}{4}e^{-\lambda_2 t}} = \frac{1}{1 + 3e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}},$$

Alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr(\mathcal{P} \mid T > t) = 0.$$

Plus la durée de vie de la boîte de vitesses est longue, plus nous sommes certains qu'elle est authentique.

Exercice 30. Une station service est approvisionnée en essence une fois par semaine. Supposons que le volume d'essence X potentiellement vendu (en unité de 10'000 litres) a pour fonction de densité

$$f(x) = \begin{cases} 6(x-2)(3-x), & 2 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- a) Calculer l'espérance et la variance de cette loi.
- b) Quelle capacité doit avoir le réservoir pour que, sur une semaine donnée, la probabilité qu'il soit vidé soit de 5%?

Solution 30. Une station service est approvisionnée en essence une fois par semaine. Supposons que le volume d'essence X potentiellement vendu (en unité de 10'000 litres) a pour fonction de densité

$$f(x) = \begin{cases} 6(x-2)(3-x), & 2 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_2^3 x f(x) dx = 6 \int_2^3 x(x-2)(3-x) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 (36 - 20x + 3x^2) \right]_2^3 = \frac{5}{2}, \\ \mathbb{E}[X^2] &= \int_2^3 x^2 f(x) dx = 6 \int_2^3 x^2(x-2)(3-x) dx = \left[-\frac{3}{10} x^3 (40 - 25x + 4x^2) \right]_2^3 = \frac{63}{10}. \end{aligned}$$

La variance est alors, $\text{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{63}{10} - (5/2)^2 = \frac{1}{20}$.

b) On cherche c qui satisfait $\Pr(X > c) = 0.05$, c'est-à-dire

$$\int_c^3 f(u)du = (c-3)^2(-3+2c) = \frac{1}{20}.$$

Résolvant cette equation, on obtient $c = 2.864$. La capacité du réservoir est donc 28'640 litres.

Exercice 31. Trouver les fonctions de densité de

- a) $Y = |X|$ quand (i) $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, (ii) X suit la loi de Laplace avec $\eta = 0$, $\tau = 1$;
b) $Z = 1/X$ quand $X \sim \exp(\lambda)$.

Solution 31. a) $Y = |X|$ quand (i) $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Si $y \leq 0$ alors $F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr(|X| \leq 0) = 0$.

Si $y > 0$, alors

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(|X| \leq y) \\ &= P(-y \leq X \leq y) \\ &= \Phi(y/\sigma) - \Phi(-y/\sigma) = 2\Phi(y/\sigma) - 1, \end{aligned}$$

et ainsi la fonction de densité est

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{d(2\Phi(y/\sigma) - 1)}{dy} = \frac{2}{\sigma} \phi(y/\sigma) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}, & y > 0, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\Phi(y)$ et $\phi(y)$ désignent respectivement la fonction de répartition et de densité de la loi normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$.

(ii) X a une distribution de Laplace avec $\eta = 0$, $\tau = 1$, et donc pour $y > 0$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(|X| \leq y) \\ &= P(-y \leq X \leq y) \\ &= F_X(y) - F_X(-y) = \left(1 - \frac{1}{2}e^{-y}\right) - \frac{1}{2}e^{-y} \\ &= 1 - e^{-y}, \quad y > 0, \end{aligned}$$

et ainsi $f_Y(y) = e^{-y}$, $y > 0$, i.e., $Y \sim \exp(1)$.

- b) $Z = 1/X$ quand $X \sim \exp(\lambda)$. Forcément si $z \leq 0$ alors $F_Z(z) = \Pr(Z \leq z) \leq \Pr(1/X \leq 0) = \Pr(1 \leq 0) = 0$, car $X > 0$. Pour $z > 0$,

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(1/X \leq z) = P(X \geq 1/z) = 1 - P(X < 1/z) = 1 - F_X(1/z),$$

donc la fonction de densité est

$$f_Z(z) = z^{-2} f_X(1/z) = \begin{cases} z^{-2} \lambda \exp(-\lambda/z), & z > 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 32. In finance the level of a risk of a portfolio is often measured by the value-at-risk, i.e., the loss that is exceeded with probability α , or by the expected shortfall, which is the expected loss, conditional on the loss exceeding the value at risk. Find the value-at-risk and the expected shortfall if

- a) the loss distribution is exponential with mean μ ;
- b) the loss distribution is normal with mean 0 and variance σ^2 .
- c) Discuss the properties of the expected shortfall minus the value-at-risk as $\alpha \rightarrow 0$ in a) and b).

Hint : The approximation $1 - \Phi(x) \sim \phi(x)(1/x - 1/x^3 + \dots)$ as $x \rightarrow \infty$, could be useful in c).

Solution 32. a) Soit $X \sim \exp(1/\mu)$ une variable aléatoire représentant la perte. La valeur-à-risque VaR satisfait $\Pr(X > \text{VaR}) = \alpha$, et donc $F(\text{VaR}) = 1 - \alpha$, où $F(x) = 1 - \exp(-x/\mu)$, pour $x > 0$ et $\mu > 0$. Donc $\exp(-\text{VaR}/\mu) = \alpha$, donnant $\text{VaR} = -\mu \log \alpha$, où $0 < \alpha < 1$.

Notons que comme $\alpha \rightarrow 0$, $\text{VaR} \rightarrow \infty$, comme on s'y attendrait.

La propriété de perte de mémoire (memoryless property) nous dit que, conditionnellement à $X > \text{VaR}$, $X - \text{VaR} \sim \exp(1/\mu)$, donc

$$\begin{aligned} E(X \mid X > \text{VaR}) &= E(\text{VaR} + X - \text{VaR} \mid X > \text{VaR}) \\ &= \text{VaR} + E(X - \text{VaR} \mid X > \text{VaR}) \\ &= \text{VaR} + \mu \\ &= \mu(1 - \log \alpha), \quad \alpha \in (0, 1) \end{aligned}$$

- b) Dans ce cas $X \sim N(0, \sigma^2)$, alors

$$\alpha = \Pr(X > \text{VaR}) = 1 - \Pr(X/\sigma < \text{VaR}/\sigma) = 1 - \Phi(\text{VaR}/\sigma),$$

donnant $\text{VaR} = \sigma\Phi^{-1}(1 - \alpha) = \sigma z_{1-\alpha}$. L'expected shortfall est

$$\begin{aligned} E(X \mid X > \text{VaR}) &= \frac{\int_{\sigma z_{1-\alpha}}^{\infty} x \sigma^{-1} \phi(x/\sigma) dx}{\Pr(X > \sigma z_{1-\alpha})} \\ &= \sigma \frac{\int_{z_{1-\alpha}}^{\infty} z \phi(z) dz}{1 - \Phi(z_{1-\alpha})} \\ &= \sigma \frac{\phi(z_{1-\alpha})}{1 - \Phi(z_{1-\alpha})}. \end{aligned}$$

- c) Dans le cas exponentiel, $E(X \mid X > \text{VaR}) - \text{VaR} = \mu$, la différence reste alors constante. Donc, peu importe la rareté de l'événement, la perte espérée au-delà reste la même.

Dans le cas de la distribution normale,

$$\begin{aligned} E(X \mid X > \text{VaR}) - \text{VaR} &= \sigma \frac{\phi(z_{1-\alpha})}{1 - \Phi(z_{1-\alpha})} - \sigma z_{1-\alpha} \\ &\sim \sigma \frac{\phi(z_{1-\alpha})}{\phi(z_{1-\alpha})/z_{1-\alpha}(1 - 1/z_{1-\alpha}^2 + \dots)} - \sigma z_{1-\alpha} \\ &\sim \frac{\sigma}{z_{1-\alpha}} \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ainsi la perte espérée au-delà de la VaR devient de plus en plus petite quand $\alpha \rightarrow 0$.